北京航空航天大学

2011－2012 学年 第二学期期中

《 工科数学分析（2） 》

班号 学号 姓名 成绩

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
| 成 绩 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 阅卷人 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 校对人 |  |  |  |  |  |  |  |  |

**2012年04月25日**

1. **求解下面问题（每小题8分，满分48分）**

1)已知及点、，求函数在点处沿由到方向的方向导数，并求此函数在点处方向导数的最大值。

解：由条件得  -------------1分

 --------------2分



从而 = --------------2分

点A的梯度方向是 -------------1分

所以方向导数的最大值是 --------------2分

2)将函数在上展开成Fourier级数.

**解：**将函数延拓成的上周期为的函数，延拓后函数的不连续点为，Fourier系数为

 -------------2分



 --------------2分

----2分

由收敛定理，的Fourier级数

 -------------2分

3) 求函数在点(0,0)处的重极限和两个累次极限.

**解：** ，因此重极限为.-------------4分

因为与均不存在，所以累次极限均不存在.

-------------4分

4)求曲线点处的切线与法平面方程.

**解：记** -------------1分

曲线在点的切向量为



 -------------3分

所以曲线在的切线方程为：-------------2分

曲线在处的法平面方程为：

 -------------2分

**另解：**将看做*x*的隐函数，则在点处的切向量为，其中利用隐函数组求导的方法计算即可（方程组两边关于*x*求导）

---------------------（切向量4分，方程各2分，共8分）.

5)证明方程所确定的隐函数满足方程

**解：**方程两边分别关于*x,y*求偏导，得------------2分

 -------------2分

可得 ， -------------2分

带入验证满足方程得证. -------------2分

6) 设有连续的二阶偏导,求

**解：** -------------2分

 -------------2分



-------------4分

1. **(本题满分10分)** 设满足方程，且其图形在点与曲线相切，求函数.

**解：**由特征方程, ------------2分

对应齐次方程的通解 -------------2分

设特解为，其中A为待定常数，

代入方程，得

从而得通解, ------------（求出非齐方程特解）3分

由条件知满足

代入初始条件得

最后得 .-------------（带入初值条件求出结果）3分

1. **(本题满分10分)** 讨论函数在原点(0,0)处的连续性、可偏导性和可微性.

**解：**

1. 由于，所以----------2分

从而函数点连续.

1. 由偏导数的定义



即函数点偏导数存在，且值为1. ------------4分（每个偏导2分）

1. 记，则



而不存在，因此不存在，所以函数在处不可微. ------------4分

1. **(本题满分10分)**求幂级数的收敛域，并求级数在收敛区间内的和函数.

**解：**设, 收敛半径 , ------------2分

又当时，收敛，*x*=-1时，收敛， ------------1分

所以幂级数的收敛域为[-1,1] . ------------1分

设**** 则

**** ------------1分

**** ------------2分

所以 **** ------------1分

**** ------------2分

1. **(本题满分10分)**若，证明不等式

(提示:考虑函数在条件下的最小值)

**解：**考虑函数在条件下的极值问题，

构造Lagrange函数 ------------2分

解方程组 ， ------------2分

得. ------------1分

将与边界点(0,*a*),(*a*,0)点的函数值做比较

 ------------2分

可知函数当时的最小值为. ------------1分

当*x=y=*0时，显然成立；

当且*x,y*不同时为零时，令，由上面的讨论知

 得证 -------------2分

1. **(本题满分12分)**证明:（1）函数项级数在上不一致收敛;(2) 函数项级数在上连续,且可逐项求导.

**证明**：（1）设，

因为不趋向于零， -------------2分

从而上不一致收敛于0，所以在上不一致收敛； -------------2分

（2）对任何，存在，使得当时，

，



由此可见，，在上一致收敛， ------------4分

又因为，**（或由**，）

知在上收敛. 从而在上收敛. ------------2分

又连续，于是在上连续，且逐项可微，即 ， ------------1分

由于是上的任意点，所以函数在上连续且可逐项求导，即。 ------------1分

1. **附加题（本题满分10分）**

已知函数在的一个去心邻域中有定义，如果

（1）对固定的，存在;

（2）关于在上一致，则， 即

**证1**：由Henie定理，只需证****

定义 

由条件（2）知函数列在去心邻域：上一致收敛，

且  ------------4分

另一方面，由条件（1）可得  ------------2分

由一致收敛函数列极限函数的连续性知  -----------2分

从而由Henie定理，得到  ------------2分

**证2：** 由条件（2），对当时，

对一致.

令得到.由Cauchy收敛准则，存在，记为A.

即 当时， -----------4分

又由条件（2），同时成立  -----------2分

取定，由条件（1）知使得当时， ----------2分

从而当时

 ----------2分

于是